

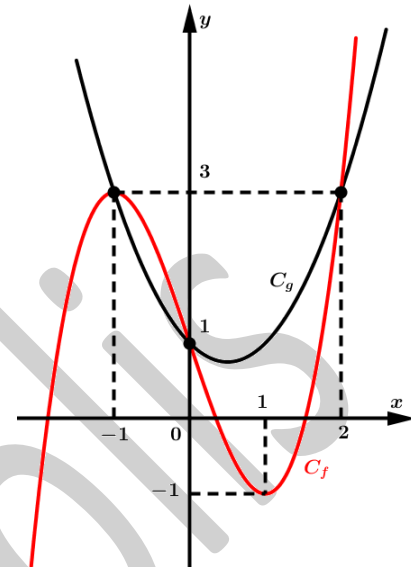
## 2η Άσκηση Γ' ΕΠΑΛ

2022 – 2023

## Έως μονοτονία συνάρτησης

Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- α)** Να αναφέρετε τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ . Είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της;
- β)** Να συγκρίνετε:
- τους αριθμούς  $f(2020)$  και  $f(2021)$ .
  - τους αριθμούς  $f(x^{2020} + 1)$  και  $f(x^{2020} + 2)$ .
- γ)** Να αναφέρετε (αν υπάρχουν) τα ολικά και τοπικά ακρότατα της  $f$ .
- δ)** Να δείξετε ότι  $-2021 \leq f(x) - 2020 \leq -2017$  για κάθε  $x \in [-1, 1]$ .
- ε)** Να βρείτε τον  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε:
- η εξίσωση  $f(x) = \lambda$  να έχει ακριβώς δύο ρίζες.
  - η εξίσωση  $f(x) = \lambda$  να έχει ακριβώς μία θετική ρίζα.
- στ)** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = g(x)$ .
- ζ)** Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) > g(x)$ .



Νίκος Τούντας



## Λύση

**α)** Στο διάστημα  $(-\infty, -1]$  η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα. Στο διάστημα  $[-1, 1]$  η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα. Στο διάστημα  $[1, +\infty)$  η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

Η  $f$  δεν είναι γνησίως μονότονη γιατί δεν είναι ούτε γνησίως αύξουσα ούτε γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της.

**β) i)** Ισχύει  $1 < 2020 < 2021$  και η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$  άρα  $f(2020) < f(2021)$

**ii)** Ισχύει  $x^{2020} \geq 0 \Leftrightarrow x^{2020} + 1 \geq 1 \Leftrightarrow x^{2020} + 2 \geq 2$  άρα  $1 \leq x^{2020} + 1 < x^{2020} + 2$  και η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$  άρα  $f(x^{2020} + 1) < f(x^{2020} + 2)$ .

**γ)** Η  $f$  δεν έχει ολικά ακρότατα. Για  $x = -1$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το  $f(-1) = 3$  και για  $x = 1$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το  $f(1) = -1$ .

**δ)** Στο  $[-1, 1]$  ισχύει  $-1 \leq f(x) \leq 3 \Leftrightarrow -2021 \leq f(x) - 2020 \leq -2017$

**ε)** Η εξίσωση  $f(x) = \lambda$  έχει ρίζες τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με την οριζόντια ευθεία  $y = \lambda$ . Διακρίνουμε με βάση το σχήμα τις εξής περιπτώσεις:

- Αν  $\lambda < -1$  η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα.
- Αν  $\lambda = -1$  η εξίσωση έχει ακριβώς 2 ρίζες.
- Αν  $-1 < \lambda < 3$  η εξίσωση έχει ακριβώς 3 ρίζες.
- Αν  $\lambda = 3$  η εξίσωση έχει ακριβώς 2 ρίζες.
- Αν  $\lambda > 3$  η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα.

**i)** Για  $\lambda = -1$  και  $\lambda = 3$  η εξίσωση  $f(x) = \lambda$  έχει δύο ακριβώς ρίζες.

**ii)** Για  $\lambda > 3$  η εξίσωση έχει μοναδική θετική ρίζα.

**στ)** Οι λύσεις της εξίσωσης  $f(x) = g(x)$  είναι οι τετμημένες των σημείων τομής των  $C_f, C_g$ .

Άρα  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = -1$  ή  $x = 0$  ή  $x = 2$

**ζ)** Οι λύσεις της ανίσωσης  $f(x) > g(x)$  είναι οι τιμές του  $x$  για τις οποίες η  $C_f$  βρίσκεται πάνω από την  $C_g$  άρα  $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (2, +\infty)$

